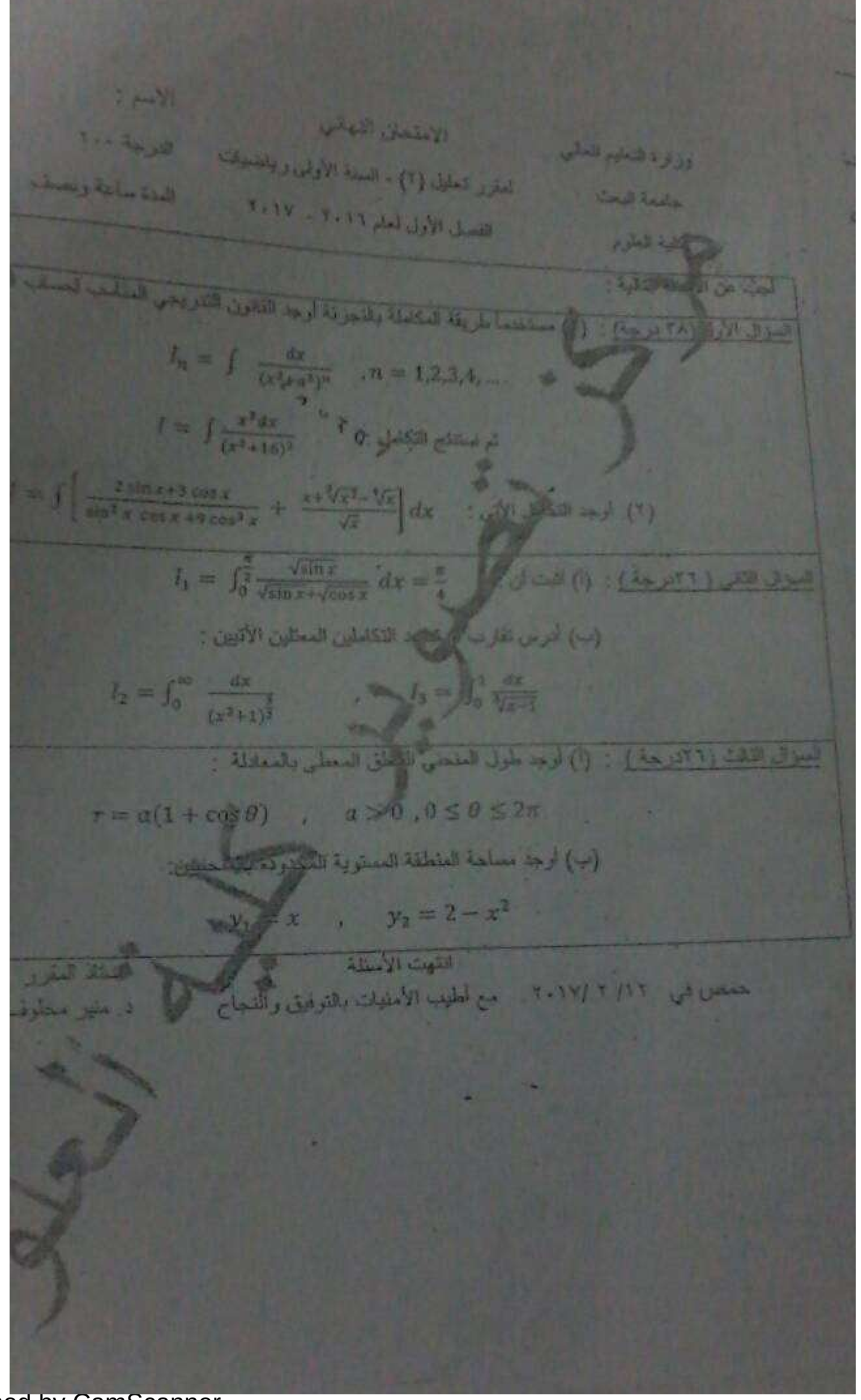


الاسم :

الامتحان النهائي

وزارة التعليم العالي	لمقرر تحليل (٢) - السنة الأولى رياضيات	الدرجة ١٠٠
جامعة البعث	الفصل الأول لعام ٢٠١٦ - ٢٠١٧	المدة ساعة ونصف
كلية العلوم		

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (٣٨ درجة) : (١) مستخدماً طريقة المكاملة بالتجزئة أوجد القانون التدريجي المناسب لحساب

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \quad , n = 1,2,3,4,\ldots$$

ثم استنتج التكامل :

$$I = \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+16)^2}$$

(٢) أوجد التكامل الآتي :

$$I = \int \left[\frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x} + \frac{x+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} \right] dx$$

السؤال الثاني (٣٦ درجة) : (أ) اثبت أن :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

(ب) ادرس تقارب أو تباعد التكاملين المعطيين الآتيين :

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

السؤال الثالث (٢٦ درجة) : (أ) أوجد طول المنحني المغلق المعطى بالمعادلة :

$$r = a(1+\cos\theta) \quad , \quad a > 0 \ , 0 \le \theta \le 2\pi$$

(ب) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين:

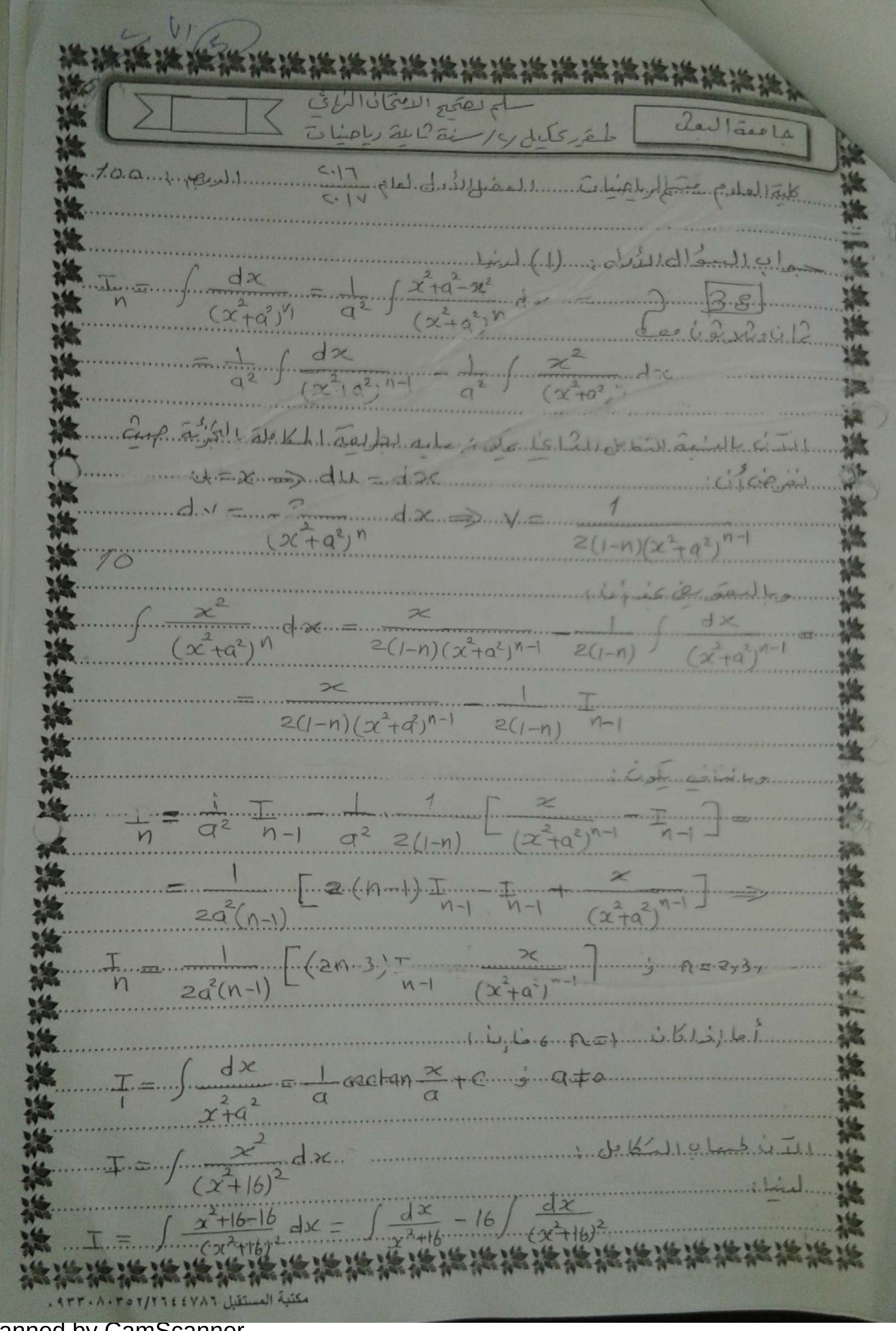
$$y_1 = x \quad , \quad y_2 = 2 - x^2$$

انتهت الأسئلة

حمص في ١٢/ ٢/ ٢٠١٧   مع أطيب الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر

د. منير محلوف



جامعة البعث

سلم تصحيح الامتحان النظري

مقرر تكامل ٢ / سنة ثانية رياضيات

كلية العلوم قسم الرياضيات ...... الفصل الأول لعام $\frac{2016}{2017}$ ...... المدرس ...... ٪٥٠

جواب السؤال الأول: (1) لدينا

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

3 ع

٣ درجات فقط

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

التكامل بالنسبة الثاني نحصل عليه بطريقة التكامل بالتجزئة حيث

نفرض أن: $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

10

وبالتعويض نجد أن:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{x}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{x}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}$$

وبالتعويض يكون:

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2(1-n)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - I_{n-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[2(n-1) I_{n-1} - I_{n-1} + \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right] \Rightarrow$$

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[(2n-3) I_{n-1} + \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right] \; ; \; n = 2, 3, \ldots$$

أما إذا كان $n=1$ فإننا:

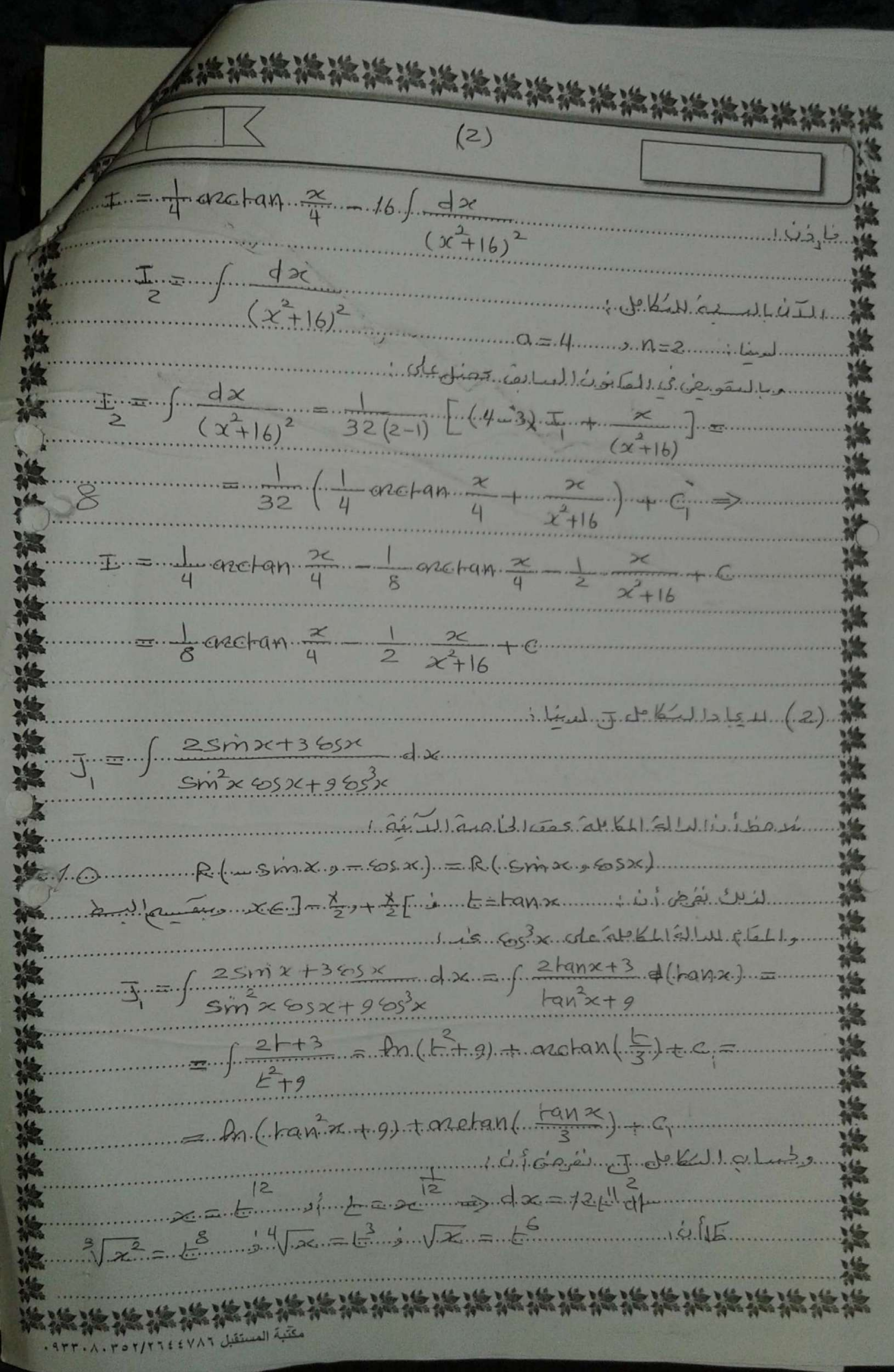
$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c \; ; \; a \neq 0$$

التمرين لحساب التكامل:

$$I = \int \frac{x^2}{(x^2+16)^2}\,dx$$

لدينا:

$$I = \int \frac{x^2+16-16}{(x^2+16)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+16} - 16\int \frac{dx}{(x^2+16)^2}$$



$$I = \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{4} - 16\int\frac{dx}{(x^2+16)^2}$$

نأخذ:

$$I_2 = \int\frac{dx}{(x^2+16)^2}$$

الآن بالنسبة للتكامل:

لدينا $a = 4$, $n = 2$

وبالتعويض في القانون السابق نحصل على:

$$I_2 = \int\frac{dx}{(x^2+16)^2} = \frac{1}{32(2-1)}\left[(4-3)I_1 + \frac{x}{(x^2+16)}\right] =$$

8 $$= \frac{1}{32}\left(\frac{1}{4}\arctan\frac{x}{4} + \frac{x}{x^2+16}\right) + C_1 \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\arctan\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+16} + c$$

$$= \frac{1}{8}\arctan\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+16} + c$$

(2) لإيجاد التكامل J لدينا:

$$J_1 = \int\frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x}\,dx$$

نلاحظ أن دالة المكاملة تحقق العلاقة الآتية:

1.0 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

لذلك نفرض أن: $t = \tan x$; $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ وبتقسيم البسط

والمقام للدالة المكاملة على $\cos^3 x$ نجد:

$$J_1 = \int\frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x}\,dx = \int\frac{2\tan x + 3}{\tan^2 x + 9}\,d(\tan x) =$$

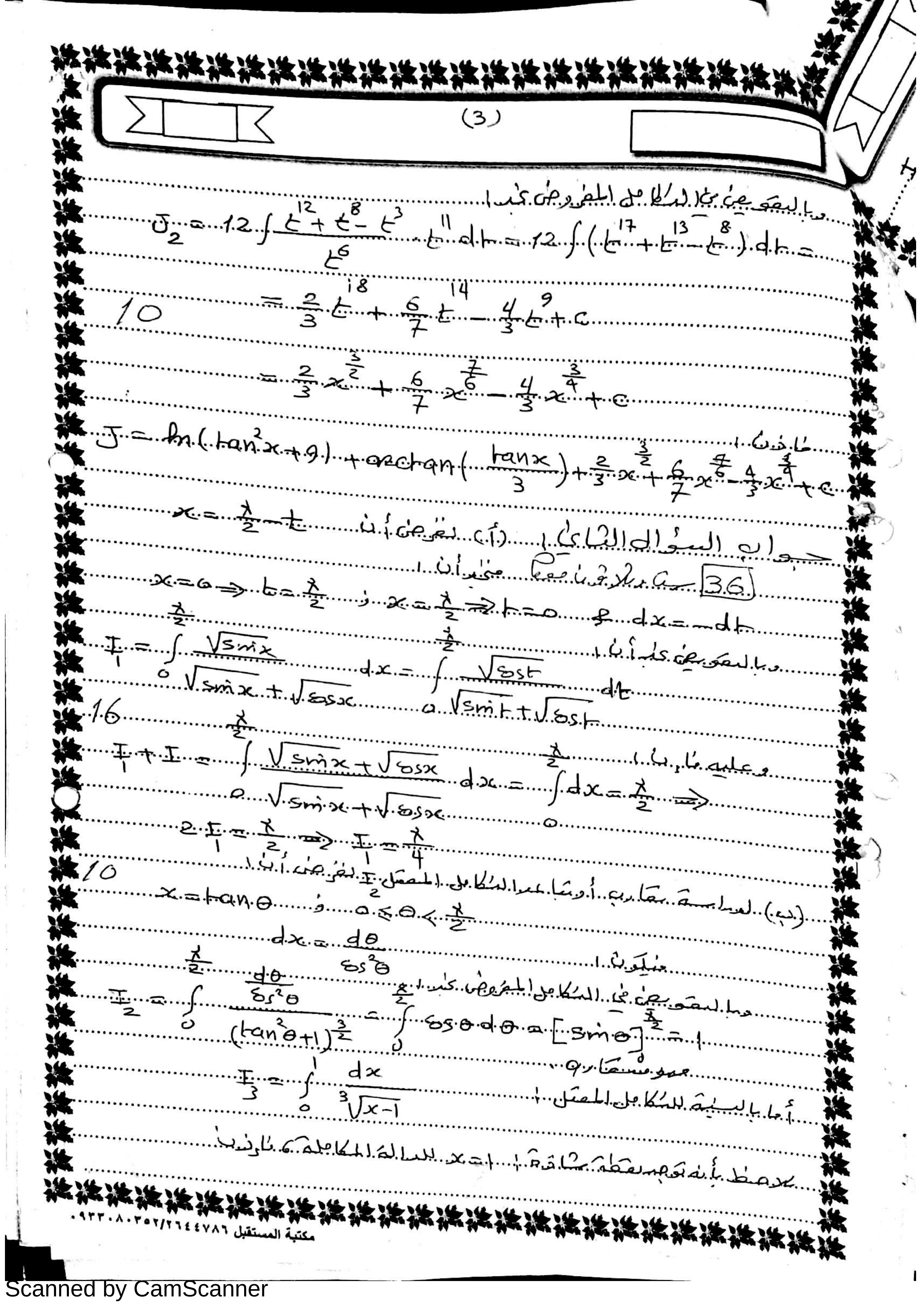
$$= \int\frac{2t+3}{t^2+9} = \ln(t^2+9) + \arctan\left(\frac{t}{3}\right) + c_1 =$$

$$= \ln(\tan^2 x + 9) + \arctan\left(\frac{\tan x}{3}\right) + c_1$$

ولحساب التكامل J نفرض أن:

$x = t^{12}$ أي $t = x^{\frac{1}{12}} \Rightarrow dx = 12t^{11}\,dt$

ولذا: $\sqrt{x} = t^6$; $\sqrt[4]{x} = t^3$; $\sqrt[3]{x^2} = t^8$



وبالتعويض في التكامل المفروض نجد:

$$J_2 = 12\int \frac{t^{12}+t^{8}-t^{3}}{t^{6}}\, t^{11}\, dt = 12\int \left(t^{17}+t^{13}-t^{8}\right) dt =$$

10 $$= \frac{2}{3}t^{18} + \frac{6}{7}t^{14} - \frac{4}{3}t^{9} + c$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + c$$

ما خذ:

$$J = \ln(\tan^2 x + 9) + \arctan\left(\frac{\tan x}{3}\right) + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + c$$

جواب السؤال الثاني: (أ) نفرض أن: $x = \frac{\pi}{2} - t$

3.6 حساب كل مما يأتي منفرداً:

$$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \quad \& \quad dx = -dt$$

وبالتعويض نجد أن:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\sin t} + \sqrt{\cos t}}\, dt$$

16

وعليه فإن:

$$I_1 + I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$2I_1 = \frac{\pi}{2}, \Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{4}$$

10

(ب) لدراسة تقارب أو تباعد التكامل المعتل I_2 نفرض أن:

$$x = \tan\theta \quad ; \quad 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$$

فيكون:

$$dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

وبالتعويض في التكامل المفروض نجد:

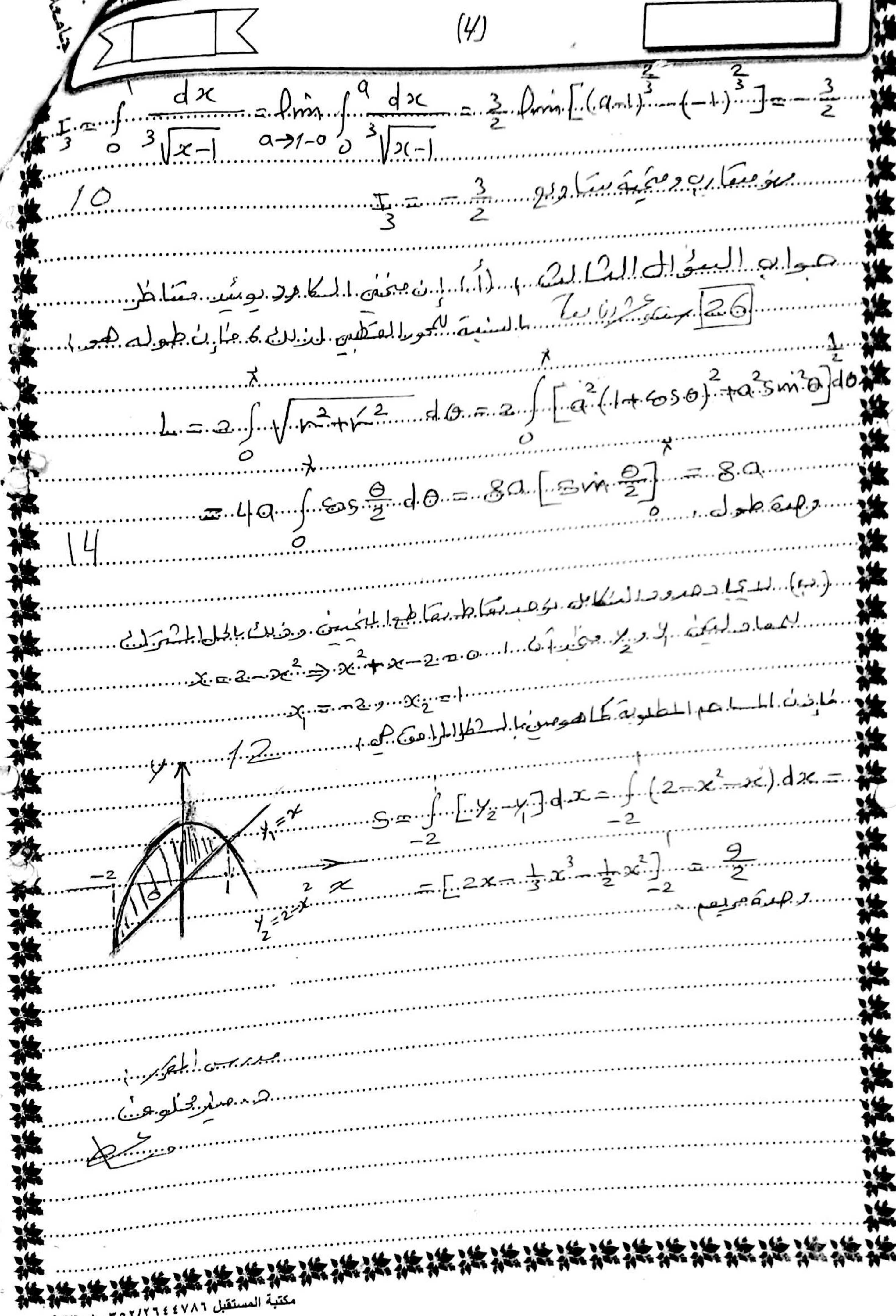
$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{(\tan^2\theta + 1)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

وهو متقارب.

أما بالنسبة للتكامل المعتل:

$$I_3 = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

نلاحظ بأنه توجد نقطة شاذة: $x = 1$ للدالة المكاملة f لذلك نكتب:



$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{a \to 1-0} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2} \lim \left[(a-1)^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}} \right] = -\frac{3}{2}$$

أي متقارب وقيمته تساوي

10 $$I_3 = -\frac{3}{2}$$

جواب السؤال الثالث: (أ) إن منحنى الكارديود يوسف متناظر

26

بالنسبة للمحور القطبي لذلك فإن طوله هو:

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \left[a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta \right]^{\frac{1}{2}} d\theta$$

$$= 4a \int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a \left[\sin\frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} = 8a$$

وحدة طول.

14

(ب) لإيجاد حدود التكامل نوجد نقاط تقاطع المنحنيين وذلك بالحل المشترك للمعادلتين y_1 و y_2 معاً أي:

$$x = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_1 = -2 \ , \ x_2 = 1$$

فإن المساحة المطلوبة كما هو مبين بالشكل المرافق هي:

12

$$S = \int_{-2}^{1} [y_2 - y_1]\, dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx =$$

$$= \left[2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

وحدة مربعة.

مدرس المقرر:

د. منير جلول